УДК 627.074.43+539.3+69.04
doi: 10.33622/0869-7019.2025.03.37-42

Устойчивость ортотропных пологих оболочек двоякой кривизны с учетом ослаблений

Николай Александрович МИШУРЕНКО, старший преподаватель, аспирант, nikolai8421@mail.ru

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет (СПбГАСУ),
190005 Санкт-Петербург, ул. 2-я Красноармейская, 4

Аннотация. *Рассмотрено влияние сквозных вырезов на устойчивость пологих оболочек двоякой кривизны, шарнирно-неподвижно закрепленных по контуру и выполненных из ортотропных материалов. Для описания процесса деформирования оболочек применена математическая модель типа Тимошенко—Рейсснера, которая учитывает геометрическую нелинейность, поперечные сдвиги и ортотропию материала. Использован дискретный метод В. В. Карпова для учета вырезов: расположение вырезов задавали единичными столбчатыми функциями. Математическая модель представлена в виде разности функционалов полной потенциальной энергии деформации обшивки оболочки и областей вырезов. Методом Ритца задача о поиске минимума разности функционалов сводится к решению системы нелинейных алгебраических уравнений методом Ньютона. По результатам вычислительных экспериментов установлено, что для рассмотренных конструкций при уменьшении вырезами объема оболочки на 4 % критическая сила, как правило, уменьшается на 12—27 %.*

Ключевые слова: *оболочки, ослабления, вырезы, устойчивость, ортотропия, критическая сила*

Для цитирования: *Мишуренко Н. А.* Устойчивость ортотропных пологих оболочек двоякой кривизны с учетом ослаблений // Промышленное и гражданское строительство. 2025. № 3. С. 37—42.
doi: 10.33622/0869-7019.2025.03.37-42

BUCKLING OF ORTHOTROPIC SHALLOW SHELLS OF DOUBLE CURVATURE CONSIDERING THE WEAKENINGS INTRODUCED DISCRETELY

Nikolai A. MISHURENKO, nikolai8421@mail.ru

Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, 2-ya Krasnoarmeyskaya ul., 4, St. Petersburg 190005, Russian Federation

Abstract. *The influence of through cuts on the buckling of shallow shells of double curvature, hinged-motionlessly fixed along the contour and made of orthotropic materials is considered. To describe the process of shell deformation, a mathematical model of the Timoshenko - Reissner type is used, which considers geometric nonlinearity, transverse shears and orthotropy of the material. The discrete method of V. V. Karpov is used to consider the cuts: the location of the cuts is specified by unit columnar functions. The mathematical model is presented as a difference of functionals of the total potential energy of deformation of the shell skin and the areas of the cuts. Using the Ritz method, the problem of finding the minimum of the difference of the functionals is reduced to solving a system of nonlinear algebraic equations using the Newton method. Based on the results of computational experiments, it was found that for the considered structures, when the shell volume is reduced by 4% by cuts, the critical force, as a rule, decreases by 12 - 27%.*

Keywords: *shells, weakening, cutouts, buckling, orthotropy, critical force*

For citation: Mishurenko N. A. Buckling of Orthotropic Shallow Shells of Double Curvature Considering the Weakenings Introduced Discretely. *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo* [Industrial and Civil Engineering], 2025, no. 3, pp. 37—42. (In Russ.). doi: 10.33622/0869-7019.2025.03.37-42

Введение

Оболочечные конструкции применяются в промышленном и гражданском строительстве, судо- и авиастроении, ракетостроении и космической технике [1—5], что связано с непрерывным развитием методов расчетов данных конструкций [6—9]. Появление и развитие композиционных материалов позволило расширить возможности использования оболочек, в связи с чем исследование деформирования и разрушения оболочек из таких материалов представляет собой актуальную задачу [10—13].

В соответствии с конструктивными требованиями, по причине некачественно выполненных работ при устройстве оболочек, повреждения участка конструкции, связанном с механическим воздействием или воздействием окружающем среды, сплошность оболочечной конструкции может быть нарушена. К оболочкам с нарушенной сплошностью можно отнести конструкции с ослаблениями вырезами. Исследование изотропных конструкций такого рода отражено в работах [14—17], ортотропных — в работах [18—23]. Отдельно следует выделить конструкции с неоднородными свойствами материала, возникающими вследствие диффузии высокопрочного материала в основной матери-

© МИШУРЕНКО Н. А., 2025

ал оболочки или внешней среды в конструкцию [24].

Цель исследования — анализ устойчивости ортотропных пологих оболочек двоякой кривизны, ослабленных вырезами.

Материалы и методы исследования

Рассматриваются ортотропные пологие оболочки двоякой кривизны с ослаблениями сквозными вырезами, находящиеся под действием равномерно-распределенной статической нагрузки и шарнирно-неподвижно закрепленные по контуру.

Наличие вырезов будем описывать функцией, предложенной В. В. Карповым (дискретный метод) [25, 26]:

$$H_{cut}(x,y) = \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{o} h^{kl}\,\bar{\delta}(x-x_l)\bar{\delta}(y-y_k), \quad (1)$$

где h^{kl} — высота выреза; o, p — количество вырезов вдоль осей x и y соответственно; $\bar{\delta}(x-x_l)$, $\bar{\delta}(y-y_k)$ — единичные столбчатые функции, равные единице в зоне выреза и равные нулю вне таких мест.

Расчетная схема выреза показана на *рис. 1*.

Функции, представляющие геометрические характеристики плоских сечений (площадь, статический момент, момент инерции) зон вырезов, имеют вид:

$$\bar{F}_{cut}(x,y) = F_{cut}^{kl}\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{o}\bar{\delta}(x-x_l)\bar{\delta}(y-y_k); \quad (2)$$

$$\bar{S}_{cut}(x,y) = S_{cut}^{kl}\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{o}\bar{\delta}(x-x_l)\bar{\delta}(y-y_k);$$

$$\bar{J}_{cut}(x,y) = J_{cut}^{kl}\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{o}\bar{\delta}(x-x_l)\bar{\delta}(y-y_k).$$

Для сквозных вырезов ($h^{kl} = h$) жесткостные переменные F_{cut}^{kl}, S_{cut}^{kl}, J_{cut}^{kl} находят интегрированием по переменной z в пределах от $-h/2$ до $h/2$:

$$F_{cut}^{kl} = \int_{-h/2}^{h/2} dz = h; \quad (3)$$

$$S_{cut}^{kl} = \int_{-h/2}^{h/2} z\,dz = 0;$$

$$J_{cut}^{kl} = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{h^3}{12}.$$

Используется математическая модель Тимошенко—Рейснера, учитывающая поперечные сдвиги, геометрическую нелинейность, ортотропию, ослабления вырезами в виде функционала полной потенциальной энергии деформации [27]

$$E_s = E_s^0 - E_s^{cut}, \quad (4)$$

где E_s^0 и E_s^{cut} — функционал полной потенциальной энергии деформации обшивки оболочки и вырезов соответственно.

Функционал полной потенциальной энергии деформации обшивки оболочки E_s^0 имеет вид

1. Геометрические параметры оболочек, м

Номер геометрии	a	b	R_1	R_2	h	v_k	v_l
1	0,2	0,2	5	3,33	0,00022	0,02	0,02
2	27	27	67,95	67,95	0,045	2,7	2,7
3	16	16	25	25	0,08	1,6	1,6
4	10,8	10,8	40,05	40,05	0,09	1,08	1,08

Примечание. a — длина оболочки; b — ширина оболочки; R_1, R_2 — радиусы кривизны оболочки вдоль осей x и y соответственно; h — толщина оболочки.

$$E_s^0 = \frac{1}{2}\int_{a_1}^{a}\int_{0}^{b}\Big(N_x\varepsilon_x + N_y\varepsilon_y + \frac{1}{2}(N_{xy}+N_{yx})\gamma_{xy} + \quad (5)$$
$$+ M_x\chi_1 + M_y\chi_2 + (M_{xy}+M_{yx})\chi_{12} + Q_x(\Psi_x-\theta_1) +$$
$$+ Q_y(\Psi_y-\theta_2) - 2P_xU - 2P_yV - 2qW\Big)ABdxdy,$$

где ε_x, ε_y — деформации удлинения; γ_{xy} — деформация сдвига в плоскости xOy; χ_1, χ_2, χ_{12} — функции изменения кривизн и кручения; N_x, N_y — нормальные усилия в направлении осей x, y; N_{xy}, N_{yx} — сдвиговые усилия в соответствующей плоскости xOy; M_x, M_y — изгибающие моменты; M_{xy}, M_{yx} — крутящие моменты; Q_x, Q_y — поперечные силы в плоскостях xOz и yOz; U, V, W — перемещения точек срединной поверхности вдоль осей x, y, z; Ψ_x, Ψ_y — углы поворота нормали в плоскостях xOz и yOz; P_x, P_y, q — компоненты внешней нагрузки вдоль осей x, y, z; A, B — параметры Ляме.

Перечисленные параметры в формуле (5) подробно представлены в [14].

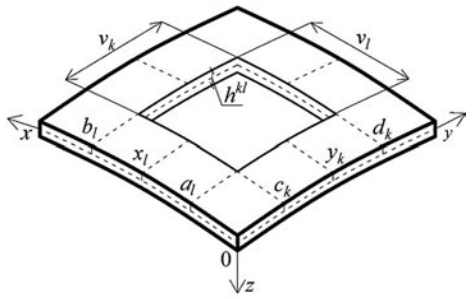
Функционал полной потенциальной энергии деформации вырезов оболочки E_s^{cut} представим в виде:

$$E_s^{cut} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{o}\int_{a_l}^{b_l}\int_{c_k}^{d_k}(B_{kl} - 2qW)ABdxdy, \quad (6)$$

где a_l, b_l — координаты начала и конца выреза вдоль оси x; c_k, d_k — координаты начала и конца выреза вдоль оси y; B_{kl}:

$$B_{kl} = G_1(F_{cut}^{kl}(\varepsilon_x + \mu_{21}\varepsilon_y)\varepsilon_x + S_{cut}^{kl}(\chi_1 + \mu_{21}\chi_2)\varepsilon_x) + \quad (7)$$
$$+ G_2(F_{cut}^{kl}(\varepsilon_y + \mu_{12}\varepsilon_x)\varepsilon_y + S_{cut}^{kl}(\chi_2 + \mu_{12}\chi_1)\varepsilon_y) +$$
$$+ G_{12}(F_{cut}^{kl}\gamma_{xy}^2 + 2S_{cut}^{kl}\chi_{12}\gamma_{xy}) +$$
$$+ G_1(S_{cut}^{kl}(\varepsilon_x + \mu_{21}\varepsilon_y)\chi_1 + J_{cut}^{kl}(\chi_1 + \mu_{21}\chi_2)\chi_1) +$$
$$+ G_2(S_{cut}^{kl}(\varepsilon_y + \mu_{12}\varepsilon_x)\chi_2 + J_{cut}^{kl}(\chi_2 + \mu_{12}\chi_1)\chi_2) +$$
$$+ 2G_{12}(S_{cut}^{kl}\gamma_{xy}\chi_{12} + 2J_{cut}^{kl}\chi_{12}^2) +$$
$$+ G_{13}k(\Psi_x - \theta_1)^2 F_{cut}^{kl} + G_{23}k(\Psi_y - \theta_2)^2 F_{cut}^{kl};$$
$$k = 5/6 \quad [25].$$

Исследование устойчивости оболочек осуществ-



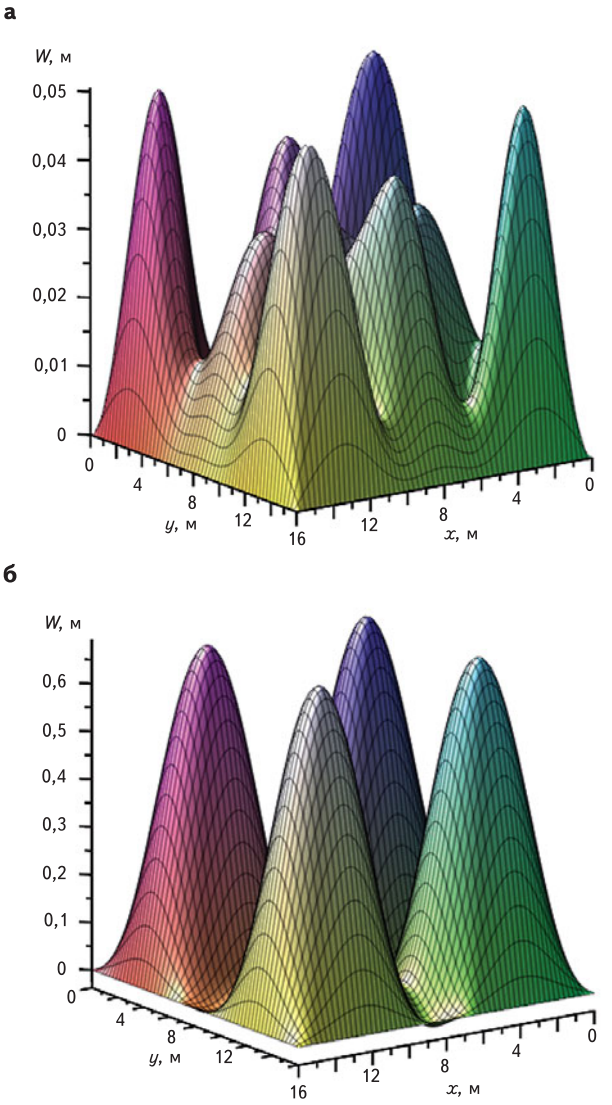
x_l и y_k — координаты расположения центров вырезов вдоль осей x, y; v_k и v_l — ширина вырезов, параллельных осям y и x соответственно

Рис. 1. *Расчетная схема выреза*

2. Механические характеристики материалов

Параметр	Материал 2 [29, 30]	Углепластик		Стеклопластик Т10-УПЭ22-27 [28]
		ЛУ-П/ ЭНФБ [11]	Т300/976 [10]	
E_1, МПа·10^4	2	14	14	2,94
μ_{12}	0,1	0,3	0,29	0,123
E_2, МПа·10^4	4	0,97	0,97	1,78
G_{12}, МПа·10^4	1	0,46	0,55	0,301
G_{13}, МПа·10^4			0,55	
G_{23}, МПа·10^4			0,33	

Рис. 2. *Поля прогибов оболочки № 3*



а — поле прогибов до потери устойчивости при нагрузке q = 0,1215 МПа, б — после потери устойчивости при нагрузке q = 0,1216 МПа

3. Верификация результатов q_{cr}, Па

№ геометрии	van Campen et al. [29]		Wang [30]		Семенов А. А. [31]	Результаты расчета
	PSM	AEM	DQM	FEM	МПРНП	
1	57,86	76,71	50,76	52,89	54,35	53,55

4. Значения критических сил $\tilde{q}_{cr}$, МН

№ геометрии	Материал	Количество вырезов $o \times p$		
		–	2×2	4×4
1	Материал 2	$2{,}142\times10^{-6}$	$2{,}128\times10^{-6}$	$1{,}727\times10^{-6}$
	Снижение критической, %	–	0,64	19,39
2	ЛУ-П/ЭНФБ	9,151	6,623	5,91
	Снижение критической, %	–	27,62	35,42
	Т300/976	9,317	6,941	6,092
	Снижение критической, %	–	25,51	34,61
3	Т10-УПЭ22-27	34,37	29,856	25,868
	Снижение критической, %	–	13,13	24,74
	ЛУ-П/ЭНФБ	61,675	51,288	50,816
	Снижение критической, %	–	16,84	17,61
4	Т10-УПЭ22-27	7,625	7,582	6,145
	Снижение критической, %	–	0,56	15,41
	ЛУ-П/ЭНФБ	20,084	17,693	15,334
	Снижение критической, %	–	11,9	23,65

ляется путем нахождения минимума функционала (4). Для сведения вариационной задачи о поиске минимума функционала к решению системы нелинейных алгебраических выражений использован метод Ритца. Решение данной системы осуществляется с помощью метода Ньютона [14]. Программная реализация алгоритма выполнена в пакете компьютерной алгебры Maple.

Результаты исследования

Согласно представленной модели и алгоритму проведены расчеты шарнирно-неподвижно закрепленных по контуру пологих оболочек двоякой кривизны со сквозными вырезами ($h^{kl} = h$). Размеры конструкций и вырезов представлены в *табл. 1*. Количество вырезов вдоль осей x и y принято одинаковым.

Для расчетов приняты следующие ортотропные материалы: углепластик Т300/976 из работы [10]; углепластик ЛУ-П/ЭНФБ из статьи [11]; стеклопластик Т10-УПЭ22-27 из исследования [28]; материал 2 из статей [29, 30]. Механические характеристики материалов приведены в *табл. 2*. Оси ортотропии совпадают с локальной системой координат оболочки, ось ортотропии 1 совпадает с направлением оси x.

Вычислительные эксперименты проводились при количестве разложений функций методом Ритца $N = 16$.

Верификация результатов расчетов осуществлена путем сравнения критических нагрузок потери устойчивости оболочки из материала 2 с результатами других авторов (для оболочек без вырезов) *(табл. 3)*.

В работе [29] в основе расчетного алгоритма использованы Partitioned Solution Method (PSM) и Adjacent Equilibrium Method (AEM). В статье [30] использован Differential Quadrature Method (DQM) и конечно-элементный программный комплекс NASTRAN (FEM). Алгоритм исследования [31] построен на использовании метода продолжения решения по наилучшему параметру (МПРНП).

Значения критических сил $\widetilde{q}_{cr}$ (представляют собой произведение критической нагрузки q_{cr} на остаточную площадь обшивки оболочки) потери устойчивости в зависимости от количества вырезов приведены в *табл. 4*.

На основании анализа значений, представленных в *табл. 4*, можно констатировать, что для рассмотренных оболочек ослабление сквозными вырезами оказывает существенное влияние на величину критической силы: выключение из работы 4 % объема конструкции приводит к снижению критической силы от 11,9 до 27,62 %.

Для оболочки № 3, выполненной из стеклопластика Т10-УПЭ22-27, на *рис. 2* представлены поля прогибов при количестве вырезов 2×2.

До потери устойчивости деформирование оболочки имело симметричный характер относительно осей x, y, пиковые значения прогиба наблюдались в угловых зонах конструкции (координаты (2,2), (2,14), (14,2), (14,14)) и в центральной части оболочки (координаты (4,8), (8,4), (8,12), (12,8)). После потери устойчивости характер деформирования изменился: в центральной части наблюдается выгиб, при этом в угловых зонах пиковые значения прогиба сохранились (координаты такие же, как до потери устойчивости).

Выводы

1. Математическая модель, учитывающая геометрическую нелинейность, поперечные сдвиги, ортотропию материала, ослабления вырезами, позволяет определить критическую нагрузку потери устойчивости для пологих ортотропных оболочек.

2. Запись математической модели в виде разности функционалов полной потенциальной энергии деформации обшивки и областей вырезов дает возможность исключить учет равномерно-распределенной нагрузки в областях сквозных вырезов.

3. Учет сквозных вырезов для рассмотренных ортотропных конструкций показал, что, как правило, при малой площади вырезов и равномерном распределении их по оболочке происходит значительное снижение критической силы: при общей площади вырезов 4 % снижение критической силы составляет до 27,62 %.

4. Полученные в данной работе решения вносят вклад в развитие теории расчетов ортотропных пологих оболочек двоякой кривизны с вырезами. Разработанные решения могут быть использованы в расчетах на стадии проектирования.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ / REFERENCES

1. Krivoshapko S. N., Christian A. B. H., Mathieu G. Stages and architectural styles in design and building of shells and shell structures [Этапы и архитектурные стили в проектировании и строительстве оболочек и оболочечных конструкций]. *Building and Reconstruction*, 2022, no. 4(102), pp. 112–131. doi: 10.33979/2073-7416-2022-102-4-112-131
2. *Серёгин С. В.* Влияние асимметричных начальных несовершенств формы на свободные колебания тонких оболочек // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2016. Т. 15. № 3. С. 209–222. doi: 10.18287/2541-7533-2016-15-3-209-222

2. Seregin S. V. Influence of asymmetrical initial form imperfections on fre oscillations of thin shells. *Vestnik Samarskogo universiteta. Aerokosmicheskaya tekhnika, tekhnologii i mashinostroenie*, 2016, vol. 15, no. 3, pp. 209–222. (In Russ.).
doi: 10.18287/2541-7533-2016-15-3-209-222

3. *Разов И. О.* Колебания тороидальной оболочки-трубопровода в грунте с учетом продольной сжимающей силы и температуры // Промышленное и гражданское строительство. 2024. № 11. С. 63–71.
doi: 10.33622/0869-7019.2024.11.63-71

3. Razov I. O. Oscillations of the toroidal shell of the pipeline in the ground, taking into account the longitudinal compressive force and temperature. *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo*, 2024, no. 11, pp. 63–71. (In Russ.).
doi: 10.33622/0869-7019.2024.11.63-71

4. Lakhdari A. A., Seddak A., Bubnov S. A. et al. Finite element modeling of the behavior of a hollow cylinder in a hydrogen-containing environment [Конечно-элементное моделирование поведения полого цилиндра в водородсодержащей среде]. *Frattura Ed Integrita Strutturale*, 2020, vol. 14, no. 51, pp. 236–253.
doi: 10.3221/IGF-ESIS.51.19

5. Treshchev A. A., Kuznetsova V. O. Study of the influence of the kinetics of hydrogen saturation on the stress-deformed state of a spherical shell made from titanium alloy [Исследование воздействия кинетики наводороживания на напряженно-деформированное состояние сферической оболочки из титанового сплава]. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2022, vol. 18, no. 2, pp. 121–130.
doi: 10.22337/2587-9618-2022-18-2-121-130

6. Karpov V. V., Kobelev E. A., Maslennikov A. M., Panin A. N. Ritz method in the discrete approximation of displacements for slab calculation [Метод Ритца при дискретной аппроксимации перемещений для расчета плит]. *Architecture and Engineering*, 2023, vol. 8, no. 4, pp. 57–67.
doi: 10.23968/2500-0055-2023-8-4-57-67

7. *Семенов А. А.* Моделирование деформирования тонкостенных оболочечных конструкций при динамических воздействиях различного вида // Вестник гражданских инженеров. 2024. № 5(106). С. 41–48.
doi: 10.23968/1999-5571-2024-21-5-41-48

7. Semenov A. A. Simulation of deformation of thin-walled shell structures under dynamic loads of various types. *Vestnik grazhdanskih inzhenerov*, 2024, no. 5(106), pp. 41–48. (In Russ.).
doi: 10.23968/1999-5571-2024-21-5-41-48

8. *Разов И. О., Соколов В. Г., Дмитриев А. В.* Определение частот свободных колебаний для подземного нефтепровода большого диаметра с учетом влияния демпфера // Вестник гражданских инженеров. 2022. № 3(92). С. 53–61.
doi: 10.23968/1999-5571-2022-19-3-53-61

8. Razov I. O., Sokolov V. G., Dmitriev A. V. Determination of free oscillation frequencies for a large-diameter underground oil pipeline taking into account the influence of the damper. *Vestnik grazhdanskih inzhenerov*, 2022, no. 3(92), pp. 53–61. (In Russ.).
doi: 10.23968/1999-5571-2022-19-3-53-61

9. Karpov V., Kobelev E. Analysis of efficiency of three-layer wall panels with a discrete core [Анализ эффективности трехслойных стеновых панелей с дискретным внутренним слоем]. *Architecture and Engineering*, 2022, vol. 7, no. 1, pp. 16–22.
doi: 10.23968/2500-0055-2022-7-1-16-22

10. *Цепенников М. В., Повышев И. А., Сметанников О. Ю.* Верификация численной методики расчета разрушения конструкций из композиционных материалов // Вестник ПНИПУ. Прикладная математика и механика. 2012. № 10. С. 225–241.

10. Tsepennikov M. V., Povyshev I. A., Smetannikov O. Yu. Verification of numerical technique for composite structures failure modeling. *Vestnik PNIPU. Prikladnaja matematika i mehanika*, 2012, no. 10, pp. 225–241. (In Russ.).

11. *Смердов А. А., Буянов И. А., Чуднов И. В.* Анализ оптимальных сочетаний требований к разрабатываемым углепластикам для крупногабаритных ракетно-космических конструкций // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2012. № 8. С. 70–77.

11. Smerdov A. A., Buyanov I. A., Chudnov I. V. Analysis of optimal combinations of requirements to developed CFRP for large space-rocket designs. Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. *Mashinostroenie*, 2012, no. 8, pp. 70–77. (In Russ.).

12. Pappas G. A., Schlothauer A., Ermanni P. Bending failure analysis and modeling of thin fiber reinforced shells [Анализ и моделирование разрушения при изгибе тонковолокнистых оболочек]. *Composites Science and Technology*, 2021, vol. 216, pp. 108979.
doi: 10.1016/j.compscitech.2021.108979

13. *Хайруллин Ф. С., Сахбиев О. М.* Расчет ортотропных конструкций вариационным методом на основе трехмерных функций с конечными носителями // Вестник ПНИПУ. Механика. 2017. № 2. С. 195–207.
doi: 10.15593/perm.mech/2017.2.11

13. Khayrullin F. S., Sakhbiev O. M. Calculation of orthotropic constructions by a variation method on the basis of three-dimensional functions with final carriers. *Vestnik PNIPU. Mekhanika*, 2017, no. 2, pp. 195–207. (In Russ.). doi: 10.15593/perm.mech/2017.2.11

14. *Мишуренко Н. А., Семенов А. А.* Устойчивость пологих оболочек двоякой кривизны с учетом наличия дискретно вводимых ослаблений // Известия КГАСУ. 2023. № 3(65). С. 6–17.
doi: 10.52409/20731523_2023_3_6

14. Mishurenko N. A., Semenov A. A. Buckling of shallow shells of double curvature considering the presence of discretely introduced weakenings. *Izvestiya KGASU*, 2023, no. 3(65), pp. 6–17. (In Russ.).
doi: 10.52409/20731523_2023_3_6

15. Ritchie D., Rhodes J. Buckling and post-buckling behaviour of plates with holes [Поведение пластин с отверстиями при потере устойчивости и после потери устойчивости]. *Aeronautical Quarterly*, 1975, vol. 26, no. 4, pp. 281–296.
doi: 10.1017/S0001925900007435

16. Hao P., Wang B., Tian K. et al. Simultaneous buckling design of stiffened shells with multiple cutouts [Проектирование одновременного выпучивания усиленных оболочек с несколькими вырезами]. *Engineering Optimization*, 2017, vol. 49, no. 70007,

pp. 1116–1132.
doi: 10.1080/0305215X.2016.1235328

17. Levyakov S. V. Asymmetric thermal buckling of imperfect FGM circular plates with rotationally restrained edge [Асимметричное термическое выпучивание несовершенных круглых пластин FGM с вращательно-ограниченным краем]. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2020, vol. 20, no. 12, pp. 2050127.
doi: 10.1142/S0219455420501278
18. Keshav V., Patel S. N., Kumar R., Watts G. Effect of cutout on the stability and failure of laminated composite cylindrical panels subjected to in-plane pulse loads [Влияние выреза на устойчивость и разрушение ламинированных композитных цилиндрических панелей, подверженных импульсным нагрузкам в плоскости]. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2022, vol. 22, no. 08, pp. 2250087.
doi: 10.1142/S0219455422500870
19. Awrejcewicz J., Kurpa L., Mazur O. Dynamical instability of laminated plates with external cutout [Динамическая неустойчивость ламинированных пластин с внешним вырезом]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2016, vol. 81, pp. 103–114.
doi: 10.1016/j.ijnonlinmec.2016.01.002
20. Silveira T., Pinto V., Neufeld J. P. et al. Applicability evidence of constructal design in structural engineering: case study of biaxial elasto-plastic buckling of эsquare steel plates with elliptical cutout [Доказательства применимости конструктивного проектирования в строительной технике: исследование случая двухосного упругопластического выпучивания квадратных стальных пластин с эллиптическим вырезом]. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 2021, vol. 7, no. 2, pp. 922–934.
doi: 10.22055/jacm.2021.35385.2647
21. Dewangan H. C., Panda S. K., Hirwani C. K. Numerical deflection and stress prediction of cutout borne damaged composite flat/curved panel structure [Численное прогнозирование прогиба и напряжения в поврежденной композитной плоской/изогнутой панельной конструкции, вызванной вырезом]. *Structures*, 2021, vol. 31, pp. 660–670.
doi: 10.1016/j.istruc.2021.02.016
22. Dewangan H. C., Sharma N., Panda S. K. Thermomechanical loading and cut-out effect on static and dynamic responses of multilayered structure with TD properties [Влияние термомеханической нагрузки и вырезания на статические и динамические характеристики многослойной конструкции со свойствами TD]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2022, vol. 236, no. 16, pp. 9081–9094.
doi: 10.1177/09544062221089153
23. *Каменев И. В., Черных А. Г., Попов В. М., Белов В. В.* Устойчивость шарнирно-подвижно опертых перфорированных оболочек // Вестник гражданских инженеров. 2021. № 5(88). С. 40–48.
doi: 10.23968/1999-5571-2021-18-5-40-48
23. Kamenev I. V., Chernyh A. G., Popov V. M., Belov V. V. Stability of articulated-movable supported perforated shells. *Vestnik grazhdanskih inzhenerov*, 2021, no. 5(88), pp. 40–48. (In Russ.).
doi: 10.23968/1999-5571-2021-18-5-40-48
24. *Петров В. В.* Расчет неоднородных по толщине оболочек с учетом физической и геометрической нелинейностей // Academia. Архитектура и строительство. 2016. № 1. С. 112–117.
24. Petrov V. V. Calculation of inhomogeneous thickness of shells with considering physical and geometrical nonlinearities. *Academia. Arhitektura i Stroitelstvo*, 2016, no. 1, pp. 112–117. (In Russ.).
25. *Карпов В. В.* Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения. В 2 ч. Ч. 1. Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения. М. : Физматлит, 2010. 288 с.
25. Karpov V. V. *Prochnost' i ustoychivost' podkreplennykh obolochek vrashcheniya. Part 1. Modeli i algoritmy issledovaniya prochnosti i ustoychivosti podkreplennykh obolochek vrashcheniya* [The strength and stability of reinforced shells of revolution. In two parts. Part 1. Models and algorithms of research of the strength and stability of supported shells of revolution]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2010. 288 p. (In Russ.).
26. Karpov V. V. Models of the shells having ribs, reinforcement plates and cutouts [Модели оболочек с ребрами, усилительными пластинами и вырезами]. *International Journal of Solids and Structures*, 2018, vol. 146, pp. 117–135.
doi: 10.1016/j.ijsolstr.2018.03.024
27. Mishurenko N., Semenov A. Influence of discretely introduced cutouts on the buckling of shallow shells with double curvature [Влияние дискретно введенных вырезов на устойчивость пологих оболочек с двойной кривизной]. Journal of *Applied and Computational Mechanics*, 2024, vol. 10, no. 1, pp. 55–63.
doi: 10.22055/jacm.2023.44219.4182
28. *Тышкевич В. Н.* Выбор критерия прочности для труб из армированных пластиков // Известия Волгоградского государственного технического университета. 2011. № 5(78). С. 76–79.
28. Tyshkevich V. N. Selecting a strength criterion for reinforced plastic pipes. *Izvestija Volgogradskogo gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta*, 2011, no. 5(78), pp. 76–79. (In Russ.).
29. Campen D. H., Bouwman V. P., Zhang G. Q. et al. Semi-analytical stability analysis of doubly-curved orthotropic shallow panels – considering the effects of boundary conditions [Полуаналитический анализ устойчивости ортотропных пологих панелей двойной кривизны – с учетом влияния граничных условий]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2002, vol. 37, no. 4–5, pp. 659–667.
doi: 10.1016/S0020-7462(01)00090-7
30. Wang X. Nonlinear stability analysis of thin doubly curved orthotropic shallow shells by the differential quadrature method [Нелинейный анализ устойчивости тонких двоякоискривленных ортотропных пологих оболочек методом дифференциальных квадратур]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2007, vol. 196, no. 17–20, pp. 2242–2251. doi: 10.1016/j.cma.2006.11.009
31. Semenov A. A. Strength and stability of geometrically nonlinear orthotropic shell structures [Прочность и устойчивость геометрически нелинейных ортотропных оболочечных конструкций]. *Thin-Walled Structures*, 2016, vol. 106, pp. 428–436.
doi: 10.1016/j.tws.2016.05.018