УДК 624.131.4 DOI: 10.33622/0869-7019.2020.11.110-114

Расчет профилей осадка двухчастичной суспензии в пористой среде

Галина Леонидовна САФИНА, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики, e-mail: safinagl@mgsu.ru

ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет» (НИУ МГСУ), 129337 Москва, Ярославское ш., 26

Аннотация. *Моделирование фильтрации суспензии в пористой среде применяется при проектировании туннелей и подземных сооружений. Изучение переноса и задержания частиц в порах грунта позволяет правильно подобрать раствор для укрепления грунта и создания водонепроницаемых перегородок. Рассматривается одномерная модель долговременной глубинной фильтрации в пористой среде суспензии с частицами двух размеров. Предполагается, что частицы задерживаются на входе пор, если размер частицы превосходит диаметр поры. Строятся профили осадков больших и малых частиц, а также полного осадка для различных моментов времени. Показано, что профили больших частиц всегда монотонно убывают, профили малых частиц немонотонны, а характер монотонности профиля полного осадка зависит от параметров задачи. Графики немонотонных профилей имеют точку максимума, движущуюся от входа к выходу пористой среды при увеличении времени. Найдена предельная скорость движения точек максимума профилей осадка малых частиц и полного осадка. С помощью разработанных методов решения задачи двухчастичной суспензии получены новые результаты в теории фильтрации.*

Ключевые слова: *суспензия, фильтрация, пористая среда, профиль осадка, математическая модель.*

CALCULATION OF DEPOSIT PROFILES OF A TWO PARTICLES SUSPENSION IN A POROUS MEDIUM

Galina L. SAFINA, e-mail: safinagl@mgsu.ru

Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Yaroslavskoe shosse, 26, Moscow 129337, Russian Federation

Abstract. *Modeling of suspension filtration in a porous medium is used when designing tunnels and underground structures. The study of the particles transfer and retention in the pores of the soil makes it possible to choose the right solution for strengthening the soil and creating waterproof partitions. A one-dimensional model of long-term deep filtration in a porous medium of suspension with particles of two sizes is considered. It is assumed that retention of particles occurs at the inlet of the pores if the particle size exceeds the pore diameter. Large and small particle precipitation profiles are constructed for different times. It is shown that the profiles of large particles always decrease monotonically, the profiles of small particles are non-monotonic, and the character of the monotonicity of the profile of the total deposit depends on the problem parameters. The plots of non-monotonic profiles have a maximum point moving from the inlet to the outlet of the porous medium with increasing time. The limit maximum points velocities of small particles deposit profile and total deposit is obtained. New results in filtration theory are obtained using the developed methods for solving the two-particle suspension problem.*

Key words: *suspension, filtration, porous medium, deposit profile, mathematical model.*

Введение

При строительстве туннелей и подземных сооружений необходимо укрепить рыхлую породу и создать водонепроницаемую стену в грунте. Цементный раствор под давлением впрыскивается в пористую породу. Жидкий раствор фильтруется в порах, после застывания укрепляет грунт и препятствует протеканию пластовой воды [1, 2].

Некоторые частицы при фильтрации суспензий и коллоидов в пористой среде проходят от входа к выходу, другие застревают в порах и образуют осадок. При долговременной глубинной фильтрации осадок образуется во всей пористой среде, а не только у входа. Частицы осаждаются на каркасе пористой среды либо в горловине узких пор, либо на стенках широких пор под воздействием электрических, гидродинамических, гравитационных сил, диффузии в тупиковые поры и т. п. [3].

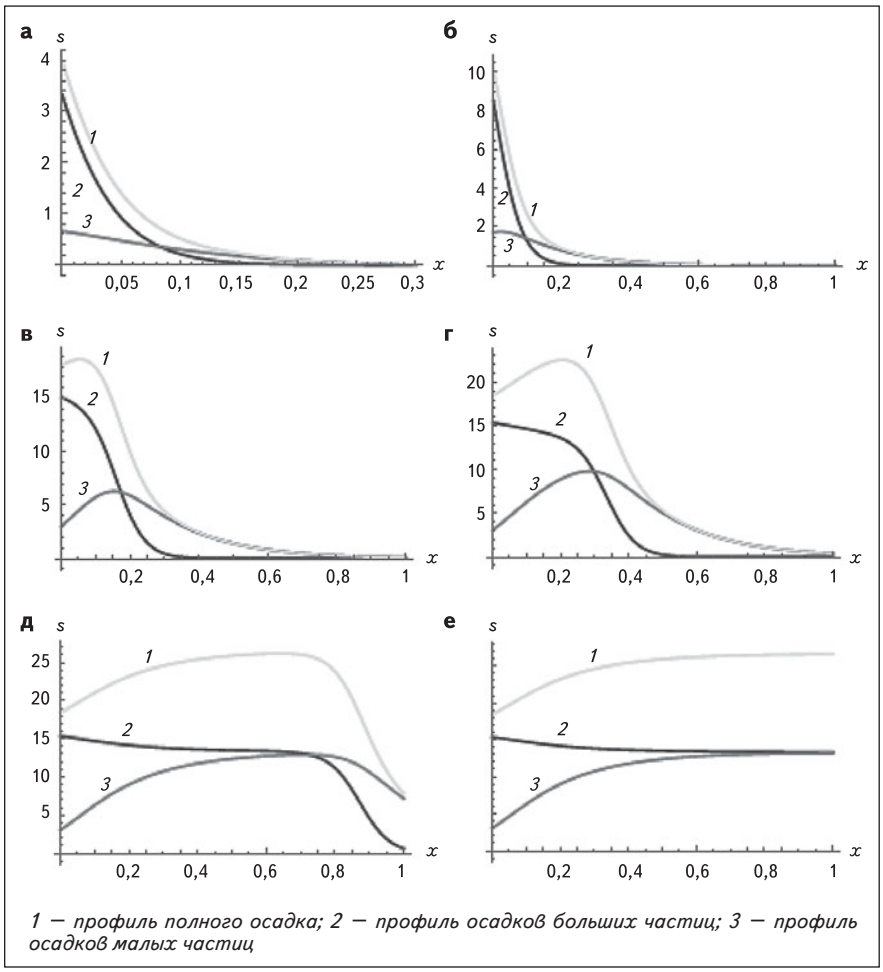
Для исследования фильтрации суспензии в пористой среде используются методы математического моделирования [4, 5]. Классическая модель долговременной глубинной фильтрации монодисперсной суспензии в пористой среде с размерным механизмом задержания частиц включает уравнение баланса масс взвешенных и осажденных частиц суспензии и кинетическое уравнение роста осадка [6]. Для некоторых одномерных моделей получены точные аналитические решения, для широкого класса

© САФИНА Г. Л., 2020

моделей удается построить асимптотику [7—9]. Если аналитические решения неизвестны, используются численные методы [10, 11].

Важнейшая характеристика процесса фильтрации — профиль осадка, а именно зависимость концентрации осажденных частиц от пространственной координаты при фиксированном времени. Профили монодисперсной суспензии всегда монотонно убывают. Если суспензии или коллоиды содержат частицы разных размеров, профили теряют монотонность. В работе [12] вычислены профили двухчастичных коллоидов, образующиеся при фильтрации в пористой среде. Показано, что профили больших частиц сохраняют монотонное убывание, а профили малых частиц меняют монотонность. Поведение профиля полного осадка зависит от параметров задачи.

В данной статье автор рассматривает задачу фильтрации двухчастичной суспензии в пористой среде. Построены профили осадка больших и малых частиц и полного осадка. Исследован процесс перехода профилей малых частиц и полного осадка от монотонного убывания при малом времени к монотонному возрастанию при большом времени. В некоторый момент времени на профилях появляется точка максимума, которая сдвигается от входа к выходу пористой среды. Вычислена скорость движения точки максимума и ее асимптотика при большом времени.



1 — профиль полного осадка; 2 — профиль осадков больших частиц; 3 — профиль осадков малых частиц

Рис. 1. *Графики осажденных s_1, s_2 и s частиц при t = 0,3 (а); t = 1 (б); t = 5 (в); t = 10 (г); t = 25 (д); t = 50 (е)*

Математическая модель

Математическая модель предполагает, что функция фильтрации линейная и блокирующая (коэффициент Ленгмюра), а концентрация взвешенных частиц суспензии мала. В этом случае функция концентрации линейная [13].

В области $\Omega = \{x \geqslant 0, \tau \geqslant -x\}$ рассмотрим квазилинейную гиперболическую систему для неизвестных концентраций взвешенных c_i и осажденных s_i частиц:

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + \frac{\partial c_i}{\partial x} + \frac{\partial s_i}{\partial t} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial s_i}{\partial t} = (1-b)\lambda_i c_i, \quad i = 1, 2. \quad (2)$$

Здесь

$$b = B_1 c_1^0 s_1 + B_2 c_2^0 s_2, \quad (3)$$

λ_1, λ_2, B_1, B_2, c_1^0, c_2^0 — положительные константы и $c_1^0 + c_2^0 = 1$.

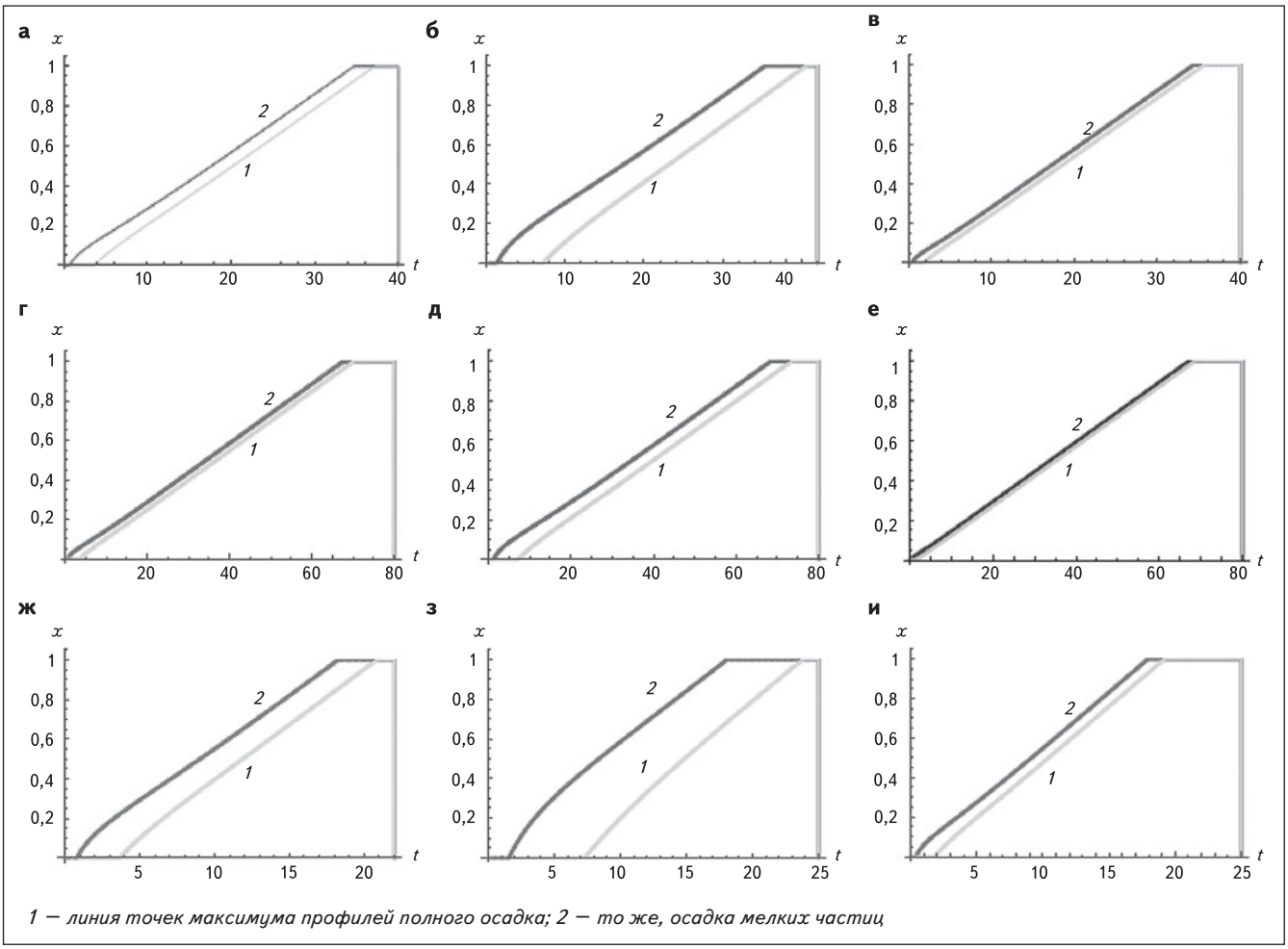
Единственность решения системы (1), (2) обеспечивают краевые и начальные условия:

$$x = 0: c_1 = c_1^0, c_2 = c_2^0; \quad (4)$$

$$t = 0: c_1 = 0, c_2 = 0, \quad (5)$$
$$s_1 = 0, s_2 = 0.$$

Условие (4) означает, что на входе пористой среды впрыскивается двухчастичная суспензия постоянной концентрации. Согласно условию (5) в начальный момент пористая среда пуста.

Фронт концентраций $t = x$ взвешенных и осажденных частиц делит область Ω на две зоны. В зоне $\Omega = \{x \geqslant 0, -x \leqslant \tau < 0\}$ взвешенные и осажденные частицы отсутствуют и решение нулевое. В зоне $\Omega = \{x \geqslant 0, \tau > 0\}$ имеются взвешенные и осажденные частицы, решение положительно. Поскольку условия (4) и (5) не согласованы в начале координат, решение c_i разрывное на фронте концентраций; решение s_i непрерывно в области Ω. Ниже рассмотрим решение в области Ω_1, в которой решение за-



1 — линия точек максимума профилей полного осадка; 2 — то же, осадка мелких частиц

Рис. 2. ***Движение точек максимума профилей для параметров*** λ_1, λ_2, B_1, B_2, c_1^0, c_2^0, ***заданных в таблице***

дачи непрерывно и положительно.

На фронте концентраций $t = x$ решения $s_1 = 0$, $s_2 = 0$. Подставляя уравнение (2) в уравнение (1), получим:

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + \frac{\partial c_i}{\partial x} + \lambda_i c_i = 0,\ i = 1,\ 2. \quad \textbf{(6)}$$

Решение уравнения (6) с условиями (4) имеет вид:

$$c_i^- = e^{-\lambda_i x},\ i = 1,\ 2. \quad \textbf{(7)}$$

Формула (7) определяет решение на фронте концентрации со стороны зоны Ω_1 (за фронтом), перед фронтом решение равно нулю.

Точное решение задачи фильтрации для монодисперсной суспензии получено в [14]. Для бидисперсной суспензии аналитическое решение неизвестно, задача считается численно.

Численный расчет

Расчет выполнен методом конечных разностей по явной разностной схеме [15—17]. Шаги сетки по времени и координате выбраны в соответствии с условием сходимости Куранта [18]. На *рис. 1* представлены профили полного осадка *1* и отдельных осадков больших *2* и малых *3* частиц в различные моменты времени. Кривые получены для параметров $c_1^0 = c_2^0 = 0{,}5$, $B_1 = 0{,}125$, $B_2 = 0{,}025$, $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 25$.

Согласно *рис. 1* профили осадков частиц большого размера монотонно убывают при любом фиксированном времени, а малых частиц монотонно убывают при малом времени и монотонно возрастают при большом времени. Профили полного осадка сохраняют монотонное убывание либо меняют монотонность в зависимости от параметров задачи. Смена монотонности профилей связана с появлением точки максимума, отделяющей монотонно возрастающую часть графика от монотонно убывающей. С увеличением времени точка максимума перемещается от входа к выходу пористой среды, постепенно увеличивая возрастающую часть графика. Точка максимума на профиле полного осадка отстает от точки максимума осадка малых частиц.

Предельные скорости перемещения точек максимума показаны в *таблице*. Скорости v_2 и v_0

Параметры и предельные скорости перемещения точек максимума

Профиль	λ_1	λ_2	B_1	B_2	v_2	v_0
а	25	5	0,125	0,025	0,028	0,029
б	12,5	2,5				
в	50	10			0,029	
г			0,0625	0,0125	0,0148	0,0149
д	25	5			0,0144	0,0148
е	100	20			0,0149	0,015
ж	12,5	2,5	0,25	0,05	0,054	0,057
з	6,25	1,25			0,056	0,059
и	25	5			0,055	0,057

Примечание. Начальные концентрации взвешенных c_1^0 и c_2^0 частиц имеют одинаковое значение 0,5 для всех случаев.

профилей соответственно осадка малых частиц и полного осадка вычислены как угловые коэффициенты асимптот при больших значениях времени.

Как видно из *таблицы*, предельные скорости перемещения точек максимума профилей осадка мелких частиц и профилей полного осадка совпадают. При изменении любого параметра скорость точек максимума изменяется непропорционально. При пропорциональном изменении коэффициентов λ_1, λ_2 предельная скорость не меняется. Таким образом, предельная скорость в точках максимума — нелинейная функция своих параметров, равномерно равная нулю с точки зрения параметров λ_1, λ_2.

Зависимость от времени точек максимума профилей для параметров из *таблицы* приведена на *рис. 2* (параметры *рис. 2а* соответствует первой строке таблицы, *рис. 2б* — второй строке таблицы и т. д.). Линия *1* соответствует точкам максимума профилей полного осадка, линия *2* — точкам максимума профилей осадка мелких частиц.

Графики максимумов *(см. рис. 2)* имеют асимптоту. Следовательно, скорость точек максимума стремится к постоянной с неограниченным увеличением во времени.

Выводы

1. Получено численное решение одномерной задачи фильтрации суспензии с частицами двух размеров в пористой среде. Построены профили осадков больших и малых частиц, а также полного осадка. Профили осадка больших частиц монотонно убывают при любом времени, а малых частиц не сохраняют монотонность. Профиль полного осадка либо всегда монотонно убывает, либо меняет монотонность в зависимости от параметров.

2. При малом времени все профили монотонно убывают. С увеличением времени на профилях появляется точка максимума, движущаяся от входа к выходу пористой среды. Точка максимума полного осадка отстает от точки максимума профиля малых частиц. При достижении точкой максимума выхода пористой среды профиль становится монотонно возрастающим. При большом времени предельные скорости перемещения точек максимума полного и частичного осадков совпадают. Скорость нелинейно зависит от коэффициентов задачи и однородна по параметрам λ_1, λ_2.

3. Исследование профилей становится сложнее, если функции фильтрации и концентрации нелинейные [19]. Поведение профилей полидисперсной суспензии, содержащей частицы трех и более различных размеров, также представляет интерес. Этим задачам будут посвящены отдельные исследования.

4. Расчет профилей осадка позволяет производить тонкую настройку экспериментов и сократить объем и стоимость лабораторных и натурных экспериментов [20, 21].

ЛИТЕРАТУРА / REFERENCES

1. Bedrikovetsky P. *Mathematical theory of oil and gas recovery: with applications to ex-USSR oil and gas fields* [Математическая теория добычи нефти и газа: с приложениями к месторождениям нефти и газа бывшего СССР]. Springer Science & Business Media Publ., 2013, 576 p.
2. Civan F. *Reservoir formation damage*, 3rd ed. [Повреждение подземного пласта, изд. 3-е]. Gulf Professional Publishing, Burlington, MA, USA, 2015, 1042 p.
3. Tsuji M., Kobayashi S., Mikake S., Sato T., Matsui H. Post-grouting experiences for reducing groundwater inflow at 500 m depth of the mizunami underground research laboratory [Опыт после заливки цементным раствором для снижения притока подземных вод на глубине 500 м в подземной исследовательской лаборатории Мидзунами]. *Procedia Engineering*, 2017, vol. 191, pp. 543–550.
4. Tien C. *Principles of filtration* [Основы фильтрации]. Elsevier Publ., Oxford, 2012, 360 p.
5. Herzig J. P., Leclerc D. M., Legoff P. Flow of

suspensions through porous media – application to deep filtration [Поток суспензии через пористую среду – применение для глубокой фильтрации]. *Industrial and Engineering Chemistry*, 1970, vol. 62(5), pp. 8–35.

6. Vyazmina E. A., Bedrikovetsky P. G., Polyanin A. D. New classes of exact solutions to nonlinear sets of equations in the theory of filtration and convective mass transfer [Новые классы точных решений нелинейных систем уравнений теории фильтрации и конвективного массопереноса]. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2007, vol. 41(5), pp. 556–564.
7. Kuzmina L. I., Osipov Yu. V., Zheglova Yu. G. Analytical model for deep bed filtration with multiple mechanisms of particle capture [Аналитическая модель глубинной фильтрации с несколькими механизмами захвата частиц]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2018, vol. 105, pp. 242–248.
8. Zhang H., Malgaresi G. V., Bedrikovetsky P. Exact solutions for suspension-colloidal transport with multiple capture mechanisms [Точные решения для суспензионно-коллоидного транспорта с несколькими механизмами захвата]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2018, vol. 105, pp. 27–42.
9. Fogler H. S. *Elements of chemical reaction engineering* [Элементы инженерии химических реакций]. Prentice Hall: Upper Saddle River, NJ, 2006, 87 p.
10. Kuzmina L., Osipov Yu. Deep bed filtration with multiple pore-blocking mechanisms [Фильтрация в глубоком слое с несколькими механизмами блокировки пор]. *MATEC Web of Conferences*, 2018, vol. 196, 04003.
11. Wang S. An improved high order finite difference method for non-conforming grid interfaces for the wave equation [Улучшенный метод конечных разностей высокого порядка для несовместимых интерфейсов сетки для волнового уравнения]. *Journal of Scientific Computing*, 2018 , vol. 77, pp. 775–792.
12. Osipov Y., Safina G., Galaguz Y. Calculation of the filtration problem by finite differences methods [Расчет задачи фильтрации методами конечных разностей]. *MATEC Web of Conferences*, 2018, vol. 251, 04021.
13. Galaguz Yu. P., Safina G. L. Modeling of particle filtration in a porous medium with changing flow direction [Моделирование фильтрации частиц в пористой среде при изменении направления потока]. *Procedia Engineering*, 2016, vol. 153, pp. 157–161.
14. Safina G. L. Numerical solution of filtration in porous rock [Численное решение задачи фильтрации в пористой среде]. *E3S Web of Conferences*, 2019, vol. 97, 05016.
15. Crist J. T., Zevi Y., McCarthy J. F., Throop J. A., Steenhuis T. S. Transport and retention mechanisms of colloids in partially saturated porous media [Механизмы переноса и удержания коллоидов в частично насыщенных пористых средах]. *Vadose Zone Journal*, 2005, vol. 4(1), pp. 184–195.
16. Riisgard H. U., Larsen P. Particle-capture mechanisms in suspension-feeding invertebrates [Механизмы захвата частиц у беспозвоночных, питающихся суспензией]. *Marine Ecology Progress Series*, 2010, vol. 418, pp. 255–293.
17. You Z., Bedrikovetsky P., Badalyan A., Hand M. Particle mobilization in porous media: temperature effects on competing electrostatic and drag forces [Мобилизация частиц в пористой среде: влияние температуры на конкурирующие электростатические силы и силы сопротивления]. *Geophysical Research Letters*, 2015, vol. 42(8), pp. 2852–2860.
18. Borazjani S., Bedrikovetsky P. Exact solutions for two-phase colloidal-suspension transport in porous media [Точные решения для транспортировки двухфазной коллоидной суспензии в пористых средах]. *Applied Mathematical Modeling*, 2017, vol. 44, pp. 296–320.
19. Kuzmina L. I., Nazaikinskii V. E., Osipov Yu. V. On a deep bed filtration problem with finite blocking time [О задаче глубокой фильтрации с конечным временем блокировки]. *Russian Journal of Mathematical Physics*, 2019, vol. 26(1), pp. 130–134.
20. Yang S., Russell T., Badalyan A., Schacht U., Woolley M., Bedrikovetsky P. Characterisation of fines migration system using laboratory pressure measurements [Определение характеристик системы миграции мелких частиц с помощью лабораторных измерений давления]. *Journal of Natural Gas Science and Engineering*, 2019, vol. 65, pp. 108–124.
21. Vaz A., Maffra D., Carageorgos T., Bedrikovetsky P. Characterisation of formation damage during reactive flows in porous media [Характеристика повреждений пласта при реактивных течениях в пористых средах]. *Journal of Natural Gas Science and Engineering*, 2016, vol. 34, pp. 1422–1433.

Для цитирования: *Сафина Г. Л.* Расчет профилей осадка двухчастичной суспензии в пористой среде. *Промышленное и гражданское строительство.* 2020. № 11. С. 110–114. DOI: 10.33622/0869-7019.2020.11.110-114.

For citation: Safina G. L. Calculation of Deposit Profiles of a Two Particles Suspension in a Porous Medium. *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo* [Industrial and Civil Engineering], 2020, no. 11, pp. 110–114. (In Russian). DOI: 10.33622/0869-7019.2020.11.110-114.